

自明な射影平面結び目上の 2 次元 3-ブレイドの標準形

大阪大学 大学院理学研究科 数学専攻
津野玄親 (Haruchika TSUNO) *

概要

S^2 の自明な円板束内に埋め込まれた 2 次元多様体で、 S^2 を分岐被覆する曲面の構造を持つものを (S^2 上の) 2 次元ブレイドと呼ぶ。任意の絡み目が閉ブレイドの表示を持つことと同様に、任意の向き付け可能な曲面絡み目は 2 次元ブレイドの表示を持つことが知られている。本講演では、2 次元ブレイドの向き付け不可能な拡張として射影平面上の 2 次元ブレイドを導入し、それらのうち次数が 3 のものは標準形という単純な形まで変形できることを示す。

1 導入

曲面結び目 [1] とは (古典的) 結び目の高次元化であり、 \mathbf{R}^4 に埋め込まれた閉曲面を指す。

例 1.1. \mathbf{R}^4 に埋め込まれた実射影平面で、以下のモーションピクチャーで表示されるものを**自明な射影平面結び目**と呼び、ここでは P^2 で表す。

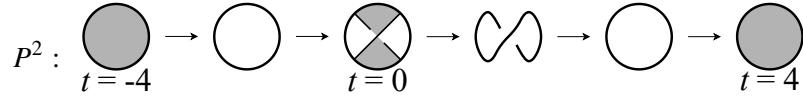


図 1: P^2 のモーションピクチャー

D^2 を 2 次元円板、 S^2 を 2 次元球面とし、射影 $D^2 \times S^2 \rightarrow S^2$ を pr_2 で表す。

定義 1.2. S^2 上の 2 次元ブレイド [2] とは、 $D^2 \times S^2$ に適切に埋め込まれた閉曲面 F で、次の条件を満たすものである。

(1) 制限写像 $\text{pr}_2|_F : F \rightarrow S^2$ は分岐被覆写像である。

$D^2 \times S^2$ を \mathbf{R}^4 に標準的に埋め込まれた S^2 の正則近傍と見なすことで、 S^2 上の 2 次元ブレイドを曲面絡み目と考えることができる。

* E-mail:u916923f@ecs.osaka-u.ac.jp

古典的な結び目理論で、任意の古典的結び目が閉ブレイドの表示を持つことが Alexander の定理として知られている。この高次元化として、次が知られている。

定理 1. [2] 任意の向き付け可能な曲面絡み目は、 S^2 上の 2 次元ブレイドとしての表示を持つ。

この主張の曲面絡み目の向き付けに関する仮定が外せるかについては、まだ未解明である。

1.1 2 次元ブレイドのチャート表示

D^2 内の m 点集合 X_m を 1 つ取って固定する。 S^2 をふたつの円板 $B^2 \cup \bar{B}^2$ に分割することを考える。 \bar{B}^2 を十分小さく取れば、 S^2 上の 2 次元ブレイド F の $D^2 \times \bar{B}^2$ への制限は $X_m \times \bar{B}^2$ に等しいと見なせる。したがって、 S^2 上の 2 次元ブレイドはその B^2 上への制限から一意に復元できると言える。

射影 $D^2 \times B^2 \rightarrow B^2$ を pr_2 で表す。

定義 1.3. ブレイド状曲面 [4] とは、 $D^2 \times B^2$ に適切に埋め込まれた曲面 S で、次の条件を満たすものである。

- (1) 制限写像 $\text{pr}_2|_S : S \rightarrow B^2$ は分岐被覆写像である。
- (2) ∂S はソリッドトーラス $D^2 \times \partial B^2$ 内の閉ブレイドである。

分岐被覆写像に関しては [3] の 13 章を参照されたい。分岐値 y のファイバー $(\text{pr}_2|_S)^{-1}(y)$ が $m - 1$ 点集合であるようなブレイド状曲面をシンプルなブレイド状曲面という。以下本稿ではシンプルなブレイド状曲面のみを考える。

条件 (2) を次のより強い条件 (2') に置き換えたものは B^2 上の 2 次元ブレイド [2] と呼ばれる。

(2') $\partial S = X_m \times \partial B^2$.

分岐被覆写像 $\text{pr}_2|_S$ の次数をブレイド状曲面 S の次数と呼ぶ。ブレイド状曲面の例をモーションピクチャーで以下に示す。

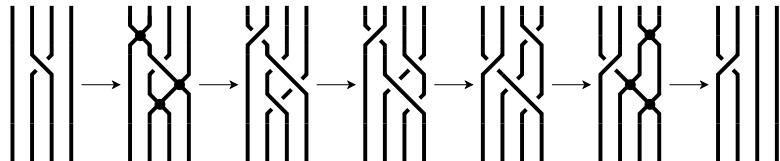


図 2: ブレイド状曲面

定義 1.4. 2 つのブレイド状曲面 S, S' が同値であるとは、 S と S' が

- 境界を固定して
- D^2 束のファイバーを保つ

ような $D^2 \times B^2$ のアンビエントイソトピーで移り合うことを言う。すなわち同相の連続な 1 パラメータ族 $\{h_t : D^2 \times B^2 \rightarrow D^2 \times B^2\}_{t \in [0,1]}$ であって

- $h_0 = \mathbf{1}_{D^2 \times B^2}$, $h_1(S) = S'$
- $h_t|_{D^2 \times \partial B^2} = \partial S$
- アンビエントイソトピー $\{\eta_t : B^2 \rightarrow B^2\}$ で, 任意の $y \in B^2$ に対して $h_t(D^2 \times \{y\}) = D^2 \times \{\eta_t(y)\}$ を満たすものが存在する.

定義 1.5. (B^2 上の) 次数 m のチャートとは, 各辺に向きとラベルが与えられた有限グラフ $\Gamma \subset B^2$ で, 次の条件を満たすものである.

- (C1) 各頂点は 1, 4 または 6 値頂点であり, ラベルは 1 以上 $m - 1$ 以下の整数である
(C2) 4 値頂点に集まる 4 辺は $|i - j| > 1$ を満たす整数 i, j でラベル付けされ, 対角線どうしが同じラベルと向きを持つ. (図 3 左)
(C3) 6 値頂点に集まる 6 辺は $|i - j| = 1$ を満たす整数 i, j が交互に現れるようにラベル付けされ, 連続する 3 辺が頂点に入り, 残りが出る向きを持つ. (図 3 右)

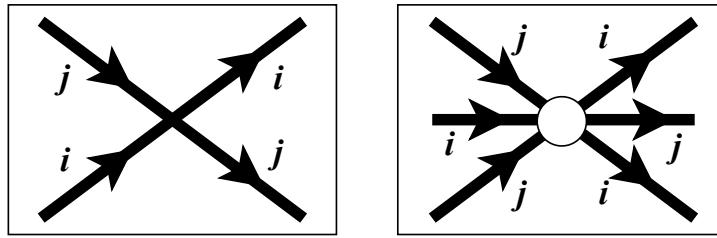


図 3: 交差 (左) と白頂点 (右)

チャートとブレイド状曲面は図 4–6 のように対応する.

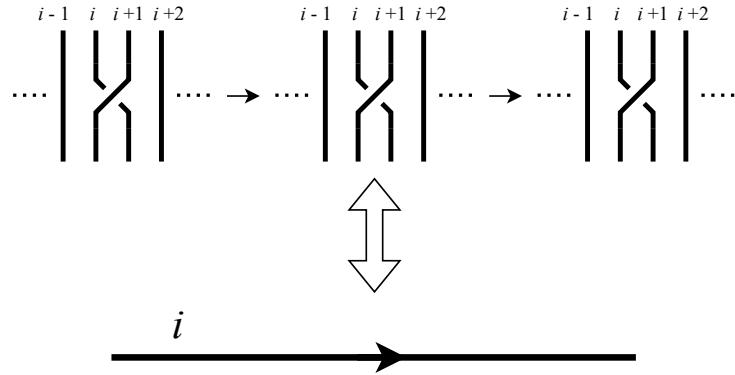


図 4: 辺の内点のモーションピクチャー

2 P^2 上の 2 次元ブレイドと Mb 上のブレイド状曲面

閉区間 $[-1, 1]$ を B^1 で表す.

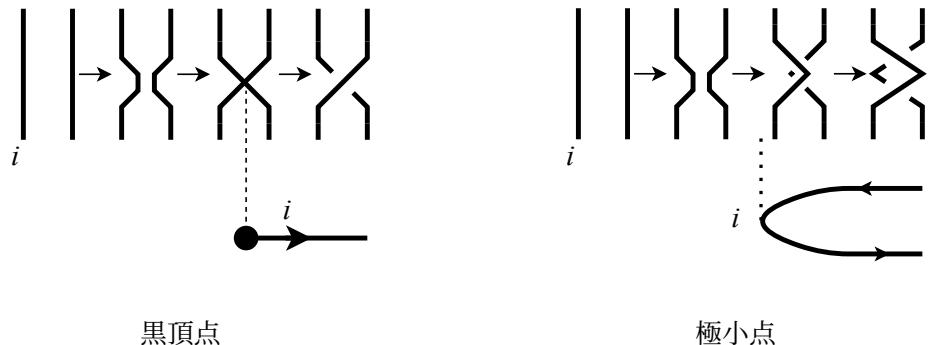


図 5: 黒頂点, 極小点のモーションピクチャー

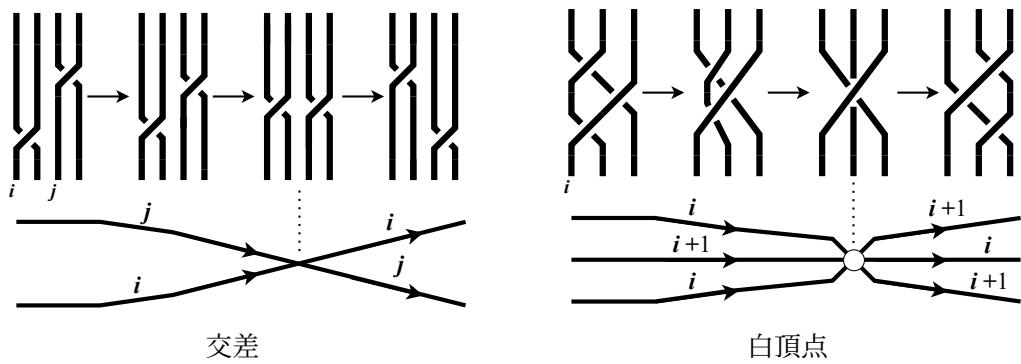


図 6: 交差, 白頂点のモーションピクチャー

2.1 P^2 上の 2 次元ブレイド

\mathbf{R}^4 における P^2 の正則近傍を $D^2 \tilde{\times} P^2$ と書き, D^2 束の射影 $\text{pr}_2 : D^2 \tilde{\times} P^2 \rightarrow P^2$ を考える.

定義 2.1. P^2 上の 2 次元ブレイドとは, $D^2 \tilde{\times} P^2$ に埋め込まれた閉曲面 F で, 次の条件 (1) を満たすものである.

- (1) 制限写像 $\text{pr}_2|_F : F \rightarrow P^2$ は分岐被覆写像である.

また P^2 上の二次元ブレイド F, F' が同値であるとは, それらがファイバーを保つ $D^2 \tilde{\times} P^2$ のアンビエントイソトピーで移り合うことを言う.

図 7 に P^2 上の 2 次元ブレイドの例を示す.

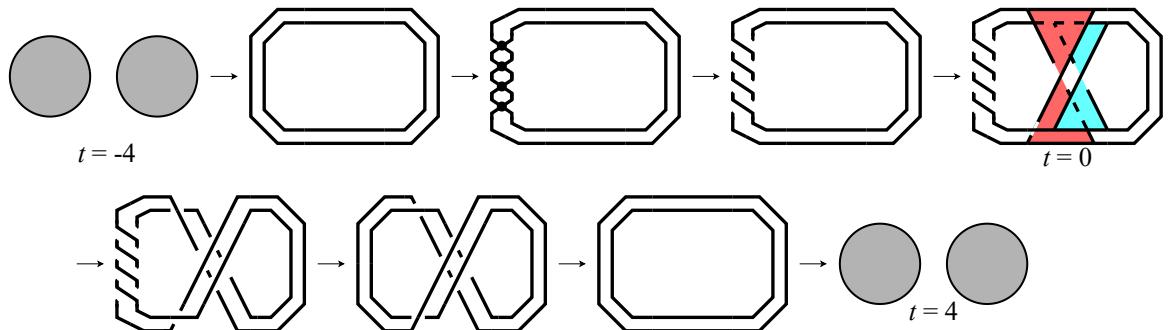


図 7: P^2 上の 2 次元ブレイド

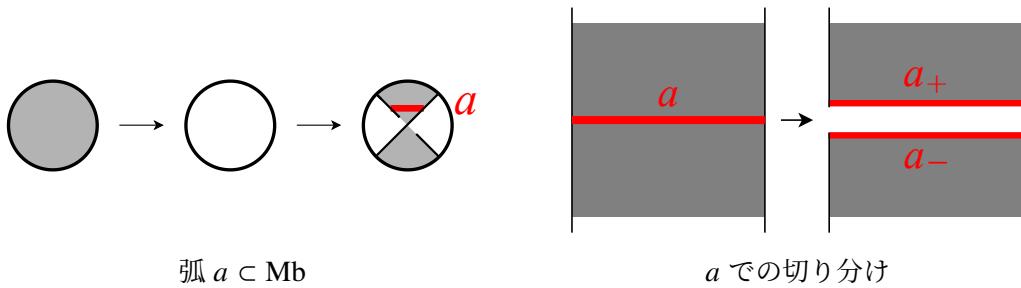


図 8: Möbius の帯の切断

2.2 Mb 上のブレイド状曲面

P^2 を以下のように分割し, Möbius の帯と同相な成分を Mb, 円板と同相な成分を B^2 と書く. 成分 Mb, B^2 を用いて, $D^2 \tilde{\times} P^2$ を

$$D^2 \tilde{\times} P^2 = D^2 \tilde{\times} \text{Mb} \cup D^2 \times B^2 \quad (\#)$$

と分割する. P^2 上の 2 次元ブレイド F を ($\#$) に沿って

$$F = (F \cap D^2 \tilde{\times} \text{Mb}) \cup (F \cap D^2 \times B^2)$$

と分割すると, $F|_{\text{Mb}} := F \cap D^2 \tilde{\times} \text{Mb}$ は Mb 上のブレイド状曲面になる.

Mb を図 8 中の弧 a で切断したものを $b = (\text{Mb} \setminus N(a)) \cup a_{-1} \cup a_1$ と書く. a からそのコピー $a_{\pm 1}$ への自然な同相を $g_{\pm 1} : a \rightarrow a_{\pm 1}$ で表す. 次の関係式を満たす同相 $f_{\pm 1} : a_{\pm 1} \rightarrow B^1$ を考える.

$$f_1 \circ g_1 = -f_{-1} \circ g_{-1}$$

$h(a_{\pm 1}(t)) = (t, \pm 1)$ を同時に満たす同相 $h : b \rightarrow B^1 \times B^1$ を 1 つ取って固定する. $1 \times h : D^2 \times b \rightarrow D^2 \times (B^1 \times B^1)$ によって Mb 上のブレイド状曲面と $B^1 \times B^1$ 上のブレイド状曲面が対応する.

補題 2.2. 上の方法で得られた（境界の一部に制約を課された）ブレイド状曲面は、次に定義する Möbius 型チャートによって表示できる.

定義 2.3. 正方形 $B^1 \times B^1$ 上に描かれた次数 m のチャート Γ が **Möbius 型**であるとは、正方形の水平対辺 $B^1 \times \{\pm 1\}$ の近くで図 9 のようになっていることを言う。すなわち、水平対辺上で $h(a_1(t)), h(a_{-1}(t))$ と書かれる点のペアは同時に Γ に含まれ、その 2 点を含む辺のペアは同じラベルと向きを持つ

通常のチャートは正方形の上下対辺と交わらない Möbius 型チャートと思うことができる。

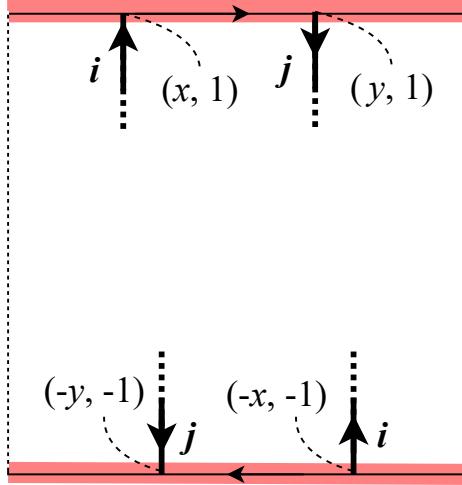


図 9: Möbius 型条件

補題 2.4. Möbius 型チャート Γ によって表示される Mb 上のブレイド状曲面は同値を除いて一意に定まる。これを $S^{\text{Mb}}(\Gamma)$ と表す。

2.3 主結果

講演者は P^2 上の 2 次元ブレイドが、**twisted** な Möbius 型チャートで表される Mb 上のブレイド状曲面と自明な 2 次元ブレイドの和で書けることを示した。また twisted で次数が 3 である Möbius 型チャートは、**標準形**に変形できることを示した。

定義 2.5. Möbius 型 m -チャート $\Gamma \subset B^1 \times B^1$ が t -twisted であるとは、正方形の垂直対辺 $\{\pm 1\} \times B^1$ の近くで図 10 のようになっていることを言う。すなわち、

- (P1) $\{-1\} \times B^1$ は Γ との共通部分を持たず、
- (P2) $\{+1\} \times B^1$ は Γ の $|t|(m-1)$ 辺と交わる。このとき
 - $t > 0$ ならば $|t|(m-1)$ 辺は全て正方形 $B^1 \times B^1$ から出る向き、 < 0 ならば入る向きを持ち、
 - ラベルは上から順に $1, 2, \dots, m-1$ のユニットが $|t|$ 回繰り返されるように現れる。

定理 2. 任意の P^2 上の 2 次元ブレイド F に対し、 $-2m$ -twisted チャート Γ と B^2 上の自明な 2 次元ブレイド D が存在し、

$$F = S^{\text{Mb}}(\Gamma) \cup D.$$

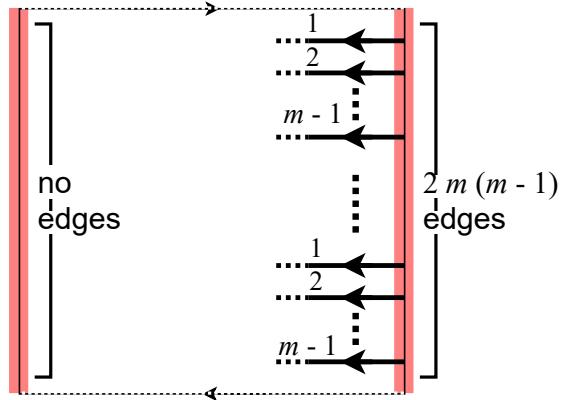


図 10: $-2m$ twisted

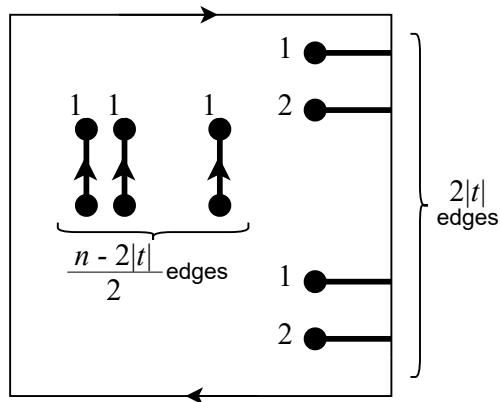


図 11: 標準形

このチャート Γ を F を表示するチャートと呼ぶ。

定理 3. $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ とする。次数が 3 である任意の t -twisted チャート Γ に対し、標準形のチャート Γ' であって

$$\Gamma \simeq \Gamma'$$

を満たすものが存在する。

定義 2.6. Twisted な Möbius 型チャート $\Gamma \subset B^1 \times B^1$ が標準形であるとは、

- (1) $B^1 \times B^1$ の境界と交わる辺は黒頂点と $\{+1\} \times B^1$ 上の境界点を結んで得られる辺のみであり
- (2) $B^1 \times B^1$ の内部に含まれる辺は 2 つの黒頂点どうしを結んで得られる、ラベル 1 の辺のみである

ことをいう。(図 11)

系 4. 任意の P^2 上の 2 次元 3-ブレイド F は標準形の 3-チャートによって表示される 3-ブレイド F' に変形できる。

参考文献

- [1] Artin, Emil: Zur Isotopie zweidimensionaler Flächen im R^4 . Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **4**(1), 174–177 (1925)
- [2] Kamada, Seiichi: Surfaces in R^4 of braid index three are ribbon. J. Knot Theory Ramifications. **1**(2), 137–160 (1992)
- [3] Kamada, Seiichi: Braid and Knot Theory in Dimension Four. Mathematical surveys and monographs, American Mathematical Society (2002)
- [4] Rudolph, Lee: Braided surfaces and Seifert ribbons for closed braids. Comment. Math. Helv. **58**(1), 1–37 (1983)